2장 확률

확률은 한 사건이 일어날 가능성을 0에서 1사이의 값으로 수치화 한 것이다. 여러 가지 상황에 대한 확률을 계산하여 의사 결정이나 미래 예측에 많이 이용한다.

2.1 확률의 뜻

☞ 생각열기	• 동전을 던지면 겉면 또는 뒷면이 나타난다. • 한 공장에서 제품을 생산하여 검사면 우량품이든지 아니면 불량품이다.
탐구	우리의 생활주변에서 많이 나타나는 위와 같은 예들의 공통점은 무엇일까?

- 우리 주변에는 동전을 던진다든지 제품을 검사한다든지 유사한 일이 반복되는 경우가 많다. 이러한 일들의 가능한 결과는 ‘겉면’ 또는 ‘뒷면’이든지 ‘우량품’ 또는 ‘불량품’이 되는 것은 알지만 무슨 결과나 될지는 모른다. 이와 같이 비슷한 일이 반복되고 모든 가능한 결과들은 알지만 한 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.
- 한 시행에서 일어날 수 있는 모든 가능한 결과들의 집합을 **표본공간**이라고 하고 이 표본공간의 부분집합을 **사건**이라 부른다. 또 한 개의 원소로 이루어진 사건을 **근원사건**이라고 한다.
- 표본공간은 대개 S로 표시하고 사건은 영어 대문자 A, B, C, ... 등으로 표시한다. 예를 들어 동전을 던지는 시행에서 ‘앞면’을 H, 뒷면을 T라 할 때 표본공간은

  S = {H, T}

  이고 던진 결과가 ‘겉면’ 또는 ‘뒷면’인 사건을

  A = {H}, B = {T}

  로 표시한다.

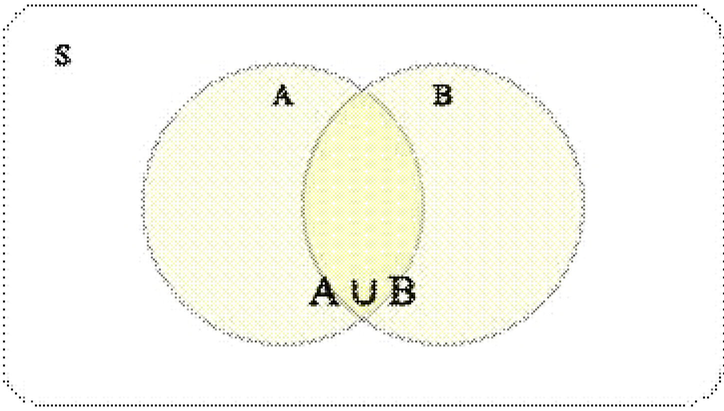
예제 2.1	한 개의 주사위를 던지는 시행에서 다음을 구하라. 1) 표본공간 S 2) 홀수가 나오는 사건 A
풀이	1) 한 개의 주사위를 던지는 시행의 표본공간은 다음과 같다. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} 2) 홀수의 눈이 나오는 사건은 다음과 같다. A = {1, 3, 5}

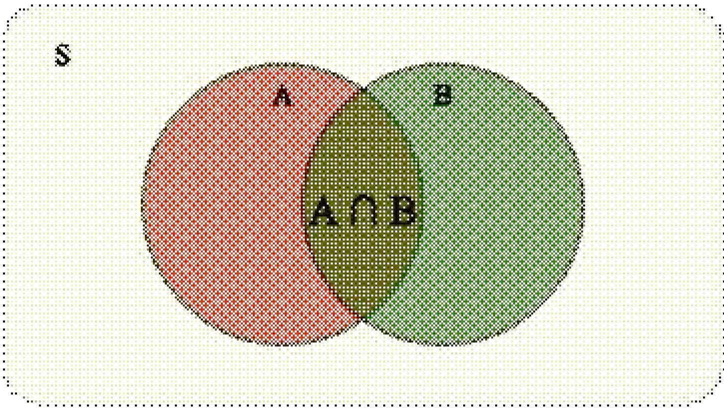
예제 2.2	한 제품을 검사하면 그 결과를 ‘우량’(O로 표시) 또는 ‘불량’(X로 표시)으로 표시한다. 두 개의 제품을 검사하는 시행에서 다음을 구하라. 1) 표본공간 S 2) ‘우량’이 한 개, ‘불량’이 한 개 나오는 사건 A
풀이	1) 두 개의 제품을 검사하는 시행의 표본공간은 다음과 같다. S = {OO, OT, TO, TT} 2) ‘우량’이 한 개, ‘불량’이 한 개 나오는 사건 A는 다음과 같다. A = {OT, TO}

문제 2.1	동전을 던졌을 때 앞면이 나오는 사건을 H, 뒷면이 나오는 사건을 T라고 하자. 동전을 두 번 던지는 시행에서 다음을 구하라. 1) 표본공간 S 2) 앞면이 한번 나오는 사건 A

문제 2.2	주사위를 두 번 던지는 시행에서 다음을 구하라. 1) 표본공간 S 2) 두 번 같은 눈이 나오는 사건 A 3) 두 번 던져 나오는 눈의 합이 3 이하인 사건 B

- 표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 $A \cup B$로 나타내고, A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A \cap B$와 같이 나타낸다.



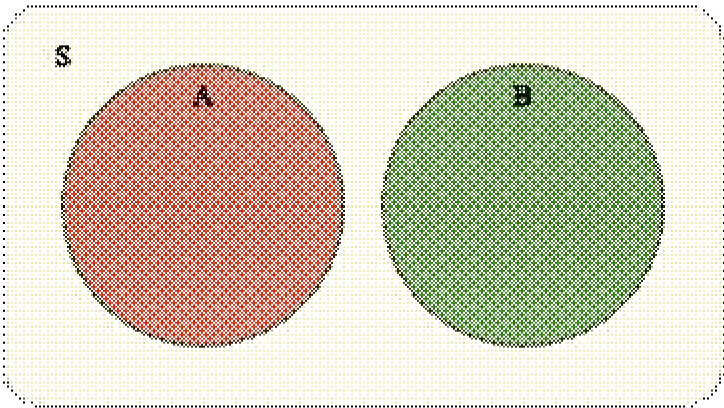


<그림 2.1> 사건 $A \cup B$와 사건 $A \cap B$

- 특히 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

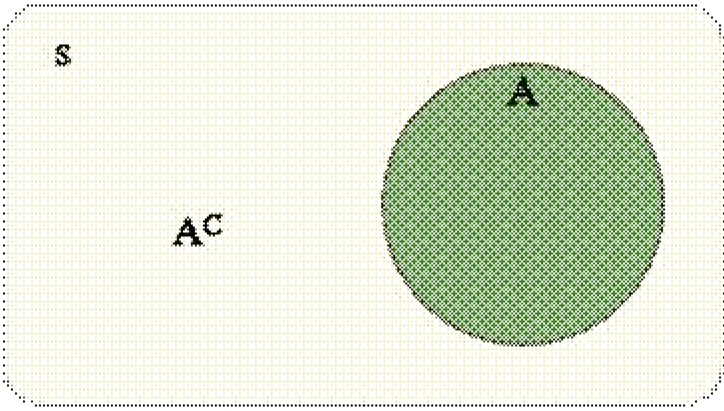
  $$A \cap B = \varnothing$$

  일 때, 이 두 사건을 서로 **배반사건**이라고 한다.



<그림 2.2> 서로 배반인 사건 A와 사건 B

- 어떤 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라고 하고, 이 사건을 A^C로 나타낸다. A와 A^C는 동시에 일어날 수 없으므로 $A \cap A^C = \varnothing$이고 사건 A와 A^C은 서로 배반사건이다.



<그림 2.3> 사건 A의 여사건 A^C

예제 2.3	주사위를 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A, 3보다 같거나 작은 수가 나오는 사건을 B라고 한다. 다음 사건을 구하라 1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) A^C
풀이	• 주사위를 던져서 나오는 수의 표본공간은 S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}이고, 사건 A는 {1, 3, 5}, 사건 B는 {1, 2, 3}이다. 따라서 1) $A \cup B$ = {1, 2, 3, 5} 2) $A \cap B$ = {1, 3} 3) A^C = {2, 4, 6} 이다.

문제 2.3	동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 한번 이상 나오는 사건을 A, 뒷면이 한번 이상 나오는 사건을 B라 할 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건인가?

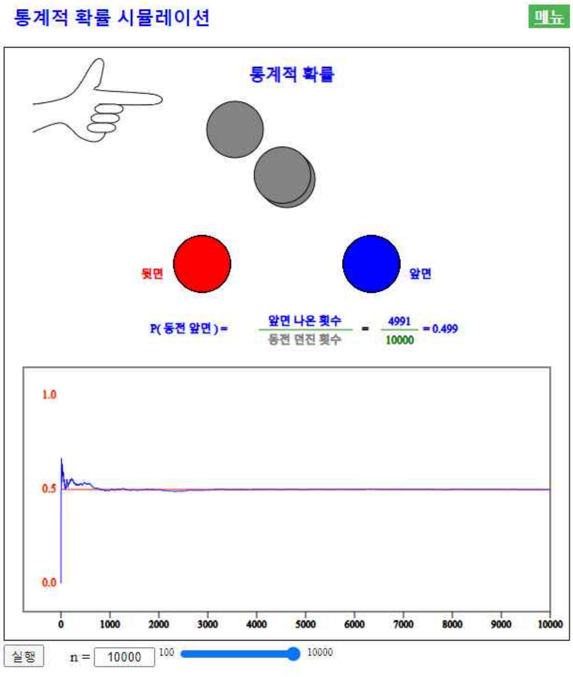
가. 통계적 확률

☞ 생각열기	동전을 던지면 앞면(H)이나 뒷면(T)이 나올 가능성이 반반일 것 같다. 이러한 가능성을 수치로 표시한 것이 확률이다. 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$로 정의하는 것이 맞을까?
탐구	동전을 10번, 50번, 100번 던져 앞면이 나오는 횟수를 살펴보고 상대도수를 구해보자.

- 실제로 동전을 10번, 50번, 100번 던져 앞면이 나오는 횟수를 적어 상대도수를 구해본 예과 다음과 같다.

동전을 던진 횟수(n)	10	50	100
앞면이 나온 횟수(x)	4	23	51
상대도수(x/n)	0.40	0.46	0.51

동전을 던진 횟수가 적을 때는 앞면이 나오는 횟수의 상대도수는 0.5가 아닐 수 있다. 하지만 동전을 던진 횟수가 점차 늘어나면 상대도수는 0.5에 가까워진다. 컴퓨터를 이용하여 동전 던지는 횟수를 더욱 많이 실험하여 보면 상대도수가 <그림 2.4>와 같이 점차 0.5에 가까워짐을 알 수 있다. 이를 동전의 앞면이 나오는 사건의 **통계적 확률**이라 한다.



<그림 2.4> 『eStatH』 동전 던지기 시뮬레이션

예제 2.4 『eStatH』를 이용하여 동전던지기 시뮬레이션을 하여 보자.

풀이

- 『eStatH』메뉴에서 ‘통계적 확률 시뮬레이션’을 선택하면 <그림 2.4>와 같은 그래프 창이 나타난다. 여기에서 n을 10000으로 입력한 후 [실행]버튼을 클릭하면 동전던지기 시행이 1 만회 실시되어 동전의 앞면이 나온 횟수의 상대도수를 관찰 할 수 있다.

문제 2.4 주사위를 잘 만들었다면 한번 던졌을 때 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$일 것 같다. 주사위를 12번, 36번, 120번 던져서 실제로 $\frac{1}{6}$인지 확인해 보자.

- 일반적으로 사건 A의 **확률**이란 사건 A가 나올 가능성을 0과 1사이의 수치로 표현한 것으로 $P(A)$로 표시한다. $P(A)$의 한 가지 정의방법으로 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수를 n_A라고 하자. 시행 횟수 n이 충분히 커짐에 따라 상대도수 $\frac{n_A}{n}$가 일정한 값 p에 가까워지면 이 값 p를 사건 A의 **통계적 확률**이라고 하고 $P(A) = \frac{n_A}{n}$로 표시한다.

☞ **통계적 확률**

일반적으로 어떤 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수를 n_A라고 하자. 시행 횟수 n이 충분히 커짐에 따라 상대도수 $\frac{n_A}{n}$가 일정한 값 p에 가까워지면 이 값 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 하고 $P(A) = \frac{n_A}{n}$로 표시한다.

예제 2.5 우리나라의 2020년 연령별 인구구조가 다음과 같다.
(출처: 통계청)

연령대	인구수(2020년)	상대도수
0-14세	630만명	0.124
15-64세	3736만명	0.736
65세 이상	707만명	0.139

우리나라 사람 중 임의로 선택한 한 명이 65세 이상일 확률을 구하라.

풀이	• 2020년 우리나라 사람 중 65세 이상은 707만 명으로 상대도수를 구하면 0.139이다. 즉, 우리나라에서 65세 이상을 만날 통계적 확률은 0.139이다.

<table>
<tr><td>문제 2.5</td><td>2017년 우리나라의 만 13세 ~ 18세 청소년을 대상으로 신체적으로 건강한지 설문조사를 한 결과가 다음과 같다. (출처: 통계청)

연령대	상대도수
전혀 그렇지 않다	0.001
그렇지 않은 편이다	0.021
그런 편이다	0.496
매우 그렇다	0.482

만 13세 ~ 18세 청소년 중 임의로 선택한 한 명이 건강할 확률을 구하라.</td></tr>
</table>

- 모든 사건의 확률을 통계적 확률을 이용하여 정의하고 현실 의사결정에 사용하는 것은 쉽지 않다. 확률을 현실 문제에 쉽게 적용하기 위하여 모형에 근거한 수학적 확률이 연구되었다.

나. 수학적 확률

☞ 생각열기	주사위는 정육면체 모양으로 만들어져 각각의 면에 눈을 한 개에서 여섯 개까지 그린 것이다.
탐구	주사위가 정확히 정육면체로 만들어져 있다면 주사위를 던졌을 때 각각의 눈이 나올 확률은 1/6로 같을 것이다. 이러한 주사위를 이용한 게임이 많은데 과연 이러한 게임이 공정할까?

- 주사위를 던졌을 때 나타나는 각각의 눈에 대한 통계적 확률을 구하려면 수많은 시행을 하여야 한다. 시행을 충분히 하여 얻은 통계적 확률은 1/6에 근사하게 될 것이다. 한 사건의 확률을 구하기 위하여 시행을 많이 하는 것은 현실적으로 쉽지 않다.
- 한 개의 주사위를 던지는 경우 표본 공간은 {1, 2, 3, 4, 5, 6}이 되고 각 표본공간의 원소가 나올 가능성이 같다고 가정하면 각각의 눈이 나올 확률은 1/6이라고 할 수 있다. 표본공간의 원소가 나타날 가능성이 모두 같다는 합리적인 가

정 하에 한 사건의 확률을 정의하는 것을 **수학적 확률**이라 한다. 현실 문제에 대하여 표본공간의 원소가 나타날 가능성이 같다고 가정할 수 있는 수학적 확률이 이용된다.

- 일반적으로 한 시행의 표본공간 S의 원소가 나타날 가능성이 모두 같다고 가정할 때, 사건 A가 일어날 **수학적 확률** $P(A)$는 다음과 같다.

$$P(A) \ = \ \frac{n(A)}{n(S)}$$

여기서 $n(S)$는 표본공간의 원소 수이고 $n(A)$은 사건 A의 원소 수

일반적으로 사건 A의 통계적 확률 p는 시행의 횟수가 충분히 크면 수학적 확률에 가까워진다.

☞ **수학적 확률**

한 시행의 표본공간 S의 원소가 나타날 가능성이 모두 같다고 가정할 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률 $P(A)$는 다음과 같다.

$$P(A) \ = \ \frac{n(A)}{n(S)}$$

여기서 $n(S)$는 표본공간의 원소 수이고 $n(A)$은 사건 A의 원소 수

예제 2.6	한 회사원이 어느 도시에 출장을 갔는데 숙소 근처에 2개의 식당(식당 1, 식당 2)이 있다. 어느 식당을 갈 것인지 망설이다가 주사위를 던져 윗면에 나타나는 점의 수를 세어 홀수가 나오면 식당1, 짝수이면 식당2로 간다고 할 때 식당1이 뽑힐 확률은?
풀이	• 주사위를 던져 윗면에 나타나는 점의 수를 세어보는 시행의 표본공간은 S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}이고, 홀수가 나올 사건 A = {1, 3, 5}이다. 표본공간의 원소 개수는 $n(S)$ = 6이고, 사건 A의 원소 개수는 $n(A)$ = 3 이다. 따라서 식당1이 뽑힐 확률은 다음과 같다. $P(A) \ = \ \frac{n(A)}{n(S)} \ = \ \frac{3}{6} \ = \ 0.5$

예제 2.7	한 제품의 생산 공장에서 10개의 제품이 들어있는 상자에서 동시에 3개를 꺼내어 제품 검사를 하려고 한다. 만일 이 상자에 우량품이 8개, 불량품이 2개 들어있다면 우량품 2개와 불량품 1개가 나올 확률을 구하라.

풀이	• 10개의 제품 중 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는 $_{10}C_3$ =120 이다. 따라서 표본공간을 S라고 하면 $n(S)$ = 120이다. • 우량품 2개와 불량품 1개가 나오는 사건을 A라고 하면 $n(A) = {}_8C_2 \times {}_2C_1 = 56$ 이다. • 따라서 사건 A의 확률은 다음과 같다. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{120}$

문제 2.6	한 개의 주사위를 던지는 시행에서 사건 A를 홀수의 눈이 나오는 사건이라고 하자. 사건 A가 일어날 수학적 확률을 구하라.

문제 2.7	서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 합이 5보다 작을 수학적 확률을 구하라.

다. 확률의 기본 성질

☞ 생각열기	어떤 사건이 일어날 확률이 1보다 클 수 있을까? 또는 0보다 작을 수 있을까?
탐구	확률은 한 사건이 일어날 가능성을 0에서 1까지의 숫자로 표시한 것이다.

- 표본공간의 각 원소가 일어날 가능성이 같을 때 수학적 확률의 성질을 알아보자. 한 사건 A는 표본공간 S의 부분집합이므로 다음이 성립한다.

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

각 변을 $n(S)$로 나누면

$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le 1$$

이므로 수학적 확률의 정의에 의해

$$0 \le P(A) \le 1$$

이다.

- 만일 사건 A가 표본공간 S라면

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

이 된다. 사건 A가 공집합 ϕ라면

$$P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(S)} = 0$$

이다.

☞ **확률의 기본 성질**

표본공간의 각 원소가 일어날 가능성이 같을 때

1) 한 사건 A에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$

2) 한 사건이 반드시 일어나는 표본공간 S라면 $P(S) = 1$

3) 한 사건이 절대로 일어나지 않는 공집합 ϕ라면 $P(\phi) = 0$

예제 2.8	네 사람 A, B, C, D를 나란히 있는 네 개의 의자에 배치시키려고 한다. 네 사람을 배치시키는 전체 경우의 수와, 이 중 A가 제일 왼쪽에 배치될 경우의 수를 구하라. A가 제일 왼쪽에 배치되는 확률은 얼마인가?
풀이	• 이 문제에서 표본공간의 원소 개수는 다음과 같다. (제일 왼쪽에 배치될 수 있는 사람의 수) × (왼쪽을 제외하고 두번째 자리에 배치될 수 있는 사람의 수) × (왼쪽 두 사람을 제외하고 세번째 자리에 배치될 수 있는 사람의 수) × (왼쪽 세 사람을 제외하고 오른쪽에 배치될 수 있는 사람의 수) = 4 × 3 × 2 × 1 = 4! = 24 • A가 왼쪽에 배치되는 사건은 A를 제외하고 나머지 3사람을 두번째, 세 번째, 오른쪽 자리에 배치되는 수이므로 3×2×1 = 3! 이다. 그러므로, A가 제일 왼쪽에 배치될 확률은 다음과 같다. 3! / 4! = 6/24 = 0.25

문제 2.8	어느 회사에 경비원이 4명(A, B, C, D)있다. 매일 아침 이들 경비원 중 두 사람을 임의로 뽑아 둘 중 한사람은 정문, 다른 사람은 후문경비로 배치한다. 4명을 정문과 후문에 배치시키는 전체 경우의 수와 이중 A가 정문에 배치되는 경우의 수를 구하라. A가 정문에 배치될 확률은?

2.2 확률의 덧셈정리

☞ 생각열기	한 중학교 학생 50명을 조사해보니 지난 올림픽 때 우리나라와 일본의 축구경기를 TV에서 관람한 학생은 30명이고 배구 경기를 관람한 학생은 20명이다. 축구와 배구 경기 둘 다 관람한 학생은 10명이었다.
탐구	축구 또는 배구를 관람한 학생의 확률은 얼마나 될까?

• 학생이 축구를 관람한 사건을 A, 배구를 관람한 사건을 B라 하면 축구 또는 배구를 관람한 사건은 $A \cup B$가 된다. 두 사건 A와 B에 대하여

$$n(A \cup B) \ = \ n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

따라서 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률 $P(A\cup B)$는 다음과 같다.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

이를 **확률의 덧셈정리**라 한다. 위의 예에서는

$$P(A\cup B) = \frac{30}{50} + \frac{20}{50} - \frac{10}{50} = \frac{40}{50}$$

이다.

- 만일 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B) = 0$ 이므로

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

이 된다.

☞ **확률의 덧셈정리**

사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률 $P(A\cup B)$는 다음과 같다.

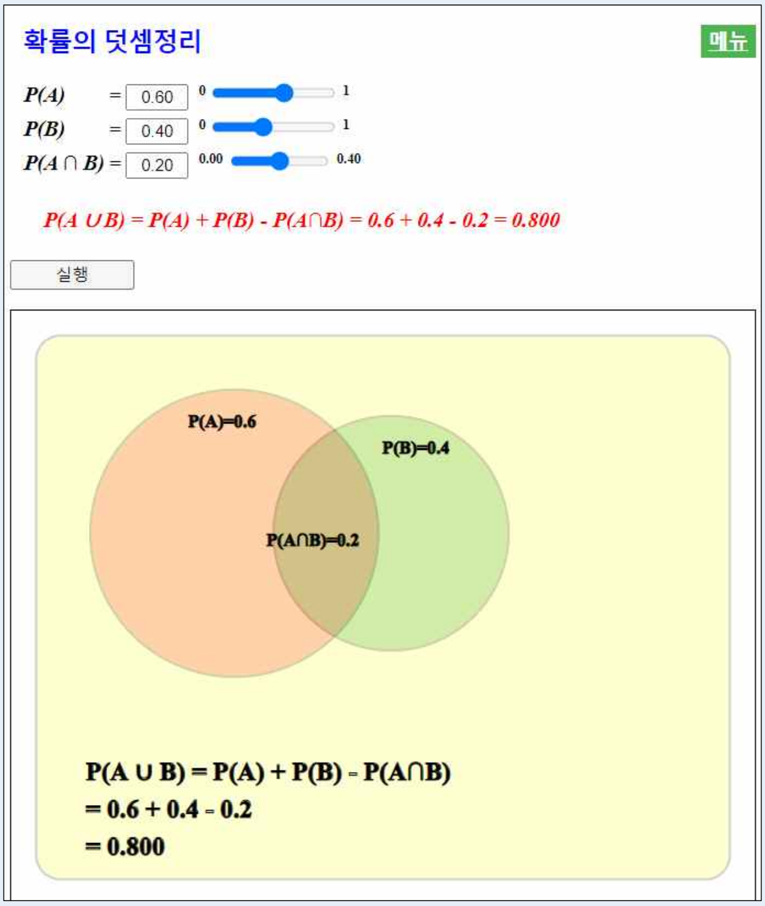
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

만일 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B) = 0$ 이므로

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

<table>
<tr><td>예제 2.9</td><td>『eStatH』를 이용하여 위 예제에 대한 확률의 덧셈정리를 실습하여 보자.</td></tr>
<tr><td>풀이</td><td>

- 『eStatH』 메뉴에서 ‘확률의 덧셈정리’를 선택하면 <그림 2.5>와 같은 창이 나타난다. 여기에서 $P(A)$ = 0.6, $P(B)$ = 0.4, $P(A \cap B)$ = 0.2를 입력한 후 [실행]버튼을 클릭하면 확률의 덧셈정리에 대한 그래프를 관찰 할 수 있다. $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$를 변화시키면서 덧셈 정리를 살펴볼 수 있다.



<그림 2.5> 확률의 덧셈정리
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>문제 2.9</td><td>한 대학 경영학과 1학년 학생 80명 중 경제학을 수강하는 학생이 50명, 정치학을 듣는 학생이 30명, 두 과목을 모두 수강하는 학생이 20명이었다. 경영학과 1학년 학생 한사람을 만났을 때 이 학생이 경제학 또는 정치학을(즉, 둘 중 한 과목이나 두 과목 모두) 수강할 확률은?</td></tr>
</table>

가. 여사건의 확률

☞ 생각열기	주사위를 던졌을 때 숫자 1 또는 2가 나오는 확률은 $\frac{2}{6}$이다.
탐구	나머지 숫자 3, 4, 5, 6 이 나올 확률은 얼마나 될까?

- 주사위를 던지는 시행의 표본공간은 S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}이고 숫자 1 또는 2가 나오는 사건을 A = {1, 2}라 하면 나머지 숫자가 나오는 사건은 여사건 A^C = {3, 4, 5, 6}이다. 사건 A와 여사건 A^C는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의해

  $$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

  $P(A \cup A^C) = P(S) = 1$이므로

  $$P(A^C) = 1 - P(A)$$

  이다.

> ☞ 여사건의 확률
>
> A^C를 사건 A의 여사건이라 할 때
>
> P(A^C) = 1 – P(A)

- 여사건을 이용한 확률계산은 '적어도' 또는 '나머지'라는 말이 들어있는 확률을 구할 때 많이 이용된다.

예제 2.10	6개의 제품이 들어있는 상자가 있는데 이중 2개가 불량품이라고 하자. 제품검사를 위해 3개를 추출하였을 때 적어도 1개의 불량품이 발견될 확률은? 검사를 위해 한번 추출한 제품은 다시 넣지 않는 비복원추출이라고 가정하자.
풀이	• 3개의 제품검사에서 한 개의 불량품이 발견될 확률은 $({}_4C_2 \times {}_2C_1)$ / ${}_6C_3$ = 3/5 이었다. 또 두 개의 불량품이 발견될 확률은 $({}_4C_1 \times {}_2C_2)$ / ${}_6C_3$= 4/20 = 1/5 이다. 따라서 적어도 1개의 불량품이 발견될 확률은 3/5 + 1/5 = 4/5 이다. • 이 확률을 구하는 다른 방법은 불량품이 하나도 없을 사건(이것을 적어도 1개의 불량품이 발견될 사건의 여사건이라고 함)의 확률을 구한 다음 1 에서 빼 주는 것이다. 즉, 적어도 1개의 불량품이 발견될 확률은 다음과 같다. 1 − $({}_4C_3$ / ${}_6C_3)$ = 1 - (4/20) = 4/5

문제 2.10	부모님을 포함한 6명의 가족이 원형식탁에 앉아 식사를 할 때 부모님이 이웃하지 않을 확률은?

2.3 조건부확률과 확률의 곱셈정리

☞ 생각열기	한 고등학교 3학년 학생 40명 중 남학생이 24명, 여학생이 16명인데, 남학생 중 8명, 여학생 중 4명이 안경을 착용한다고 한다.
탐구	1) 이 고등학교 학생 중 한명을 임의로 뽑을 때 남학생일 확률은? 2) 한 학생을 임의로 뽑았을 때 이 학생이 남학생이고 안경을 착용했을 확률은? 3) 남학생 중에서 한 명을 임의로 뽑았을 때 이 학생이 안경을 착용했을 확률은?

- 이 문제에 대한 표본공간을 남학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 F, 안경을 착용한 사건을 B, 착용안한 사건을 N으로 표시하면 문제에서 주어진 경우의 수는 다음과 같은 표로 정리할 수 있다.

	안경착용(B)	안경착용 안함(N)	합계
남학생(A) 여학생(F)	$n(A\cap B)$ = 8 $n(F\cap B)$ = 4	____ ____	$n(A)$ = 24 $n(F)$ = 16
합계	____	____	$n(S)$ = 40

- 이 표를 이용하면 문제에서 주어지지 않은 사건의 수를 쉽게 계산하여 넣을 수 있다.

	안경착용(B)	안경착용 안함(N)	합계
남학생(A) 여학생(F)	$n(A\cap B)$ = 8 $n(F\cap B)$ = 4	$n(A\cap N)$ = 16 $n(F\cap N)$ = 12	$n(A)$ = 24 $n(F)$ = 16
합계	$n(B)$ = 12	$n(N)$ = 28	$n(S)$ = 40

- 따라서 1) 이 고등학교 학생 중 한명을 임의로 뽑을 때 남학생일 확률은

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{40}$$

  이다.

  2) 한 학생을 임의로 뽑았을 때 이 학생이 남학생이고 안경을 착용했을 확률은

  $$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{8}{40}$$

  이다.

  3) 남학생 중에서 한 명을 임의로 뽑았을 때 이 학생이 안경을 착용했을 확률은 기호로 P(B|A)로 표시하며 남학생인 사건 M을 표본공간으로 볼 수 있으므로

  $$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{8}{24}$$

  이다. P(B|A)을 남학생 사건 A가 일어났을 때 안경착용 사건 B의 **조건부확률**이라 한다.
- 한 시행의 표본공간이 S이고 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

  $$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

  이다. 이 식의 우변의 분자와 분모를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\dfrac{\mathrm{n(A\cap B)}}{\mathrm{n(S)}}}{\dfrac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

이다.

> ☞ **조건부확률**
>
> 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은
>
> $$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}} \quad (\text{단 } \mathrm{P(A)} \neq 0)$$

- 위의 표에서 두 사건이 동시에 일어날 확률을 정리하면 다음과 같다. 이를 **결합확률분포표**라 부른다.

	안경착용(B)	**안경착용 안함(N)**	**합계**
남학생(A)	$\mathrm{P(A\cap B)} = \frac{8}{40}$	$\mathrm{P(A\cap N)} = \frac{16}{40}$	$\mathrm{P(A)} = \frac{24}{40}$
여학생(F)	$\mathrm{P(F\cap B)} = \frac{4}{40}$	$\mathrm{P(F\cap N)} = \frac{12}{40}$	$\mathrm{P(F)} = \frac{16}{40}$
합계	$\mathrm{P(B)} = \frac{12}{40}$	$\mathrm{P(N)} = \frac{28}{40}$	$\mathrm{P(S)} = 1$

- 여기서 $\mathrm{P(A\cap B)} = \frac{8}{40}$은 남학생 확률 $\mathrm{P(A)} = \frac{24}{40}$에 조건부확률 $\mathrm{P(B|A)} = \frac{8}{24}$을 곱하여 구할 수 있다.

$$\mathrm{P(A\cap B)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B|A)} = \frac{24}{40} \times \frac{8}{24} = \frac{8}{40}$$

이를 **확률의 곱셈정리**라 한다. 이 사실은 조건부 확률의 정의 $\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$ 에서 양변에 $\mathrm{P(A)}$를 곱하면

$$\mathrm{P(A\cap B)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B|A)}$$

가 성립함을 알 수 있다.

- $\mathrm{P(A\cap B)} = \frac{8}{40}$은 안경착용 확률 $\mathrm{P(B)} = \frac{12}{40}$에 조건부확률 $\mathrm{P(A|B)} = \frac{8}{12}$를 곱하여 구할 수도 있다.

$$\mathrm{P(A\cap B)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(A|B)} = \frac{12}{40} \times \frac{8}{12} = \frac{8}{40}$$

- 일반적으로 다음과 같은 확률의 곱셈정리가 성립한다.

> ☞ **확률의 곱셈정리**
>
> 두 사건 A와 B에 대하여 다음의 곱셈정리가 성립한다.
>
> $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$ (단, $P(A) \neq 0$)
>
> $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$ (단, $P(B) \neq 0$)

- 만일 학생들의 안경착용 여부에 대한 표가 다음과 같다고 하자.

	안경착용(B)	**안경착용 안함(N)**	**합계**
남학생(A) **여학생(F)**	$P(A \cap B)$ = **12/40** $P(F \cap B)$ = **8/40**	$P(A \cap N)$ = **12/40** $P(F \cap N)$ = **8/40**	$P(A)$ = **24/40** $P(F)$ = **16/40**
합계	$P(B)$ = **20/40**	$P(N)$ = **20/40**	$P(S)$ = **40/40**

여기서 전체 학생의 안경착용 확률 $P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$은 남학생 중에서 안경착용 확률 $P(B|A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$과 동일하다. 이와 같이 두 사건 A와 B에 대하여 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않은 때, 즉

$$P(B|A) = P(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다. 한편 두 사건 A와 B가 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라고 한다.

- 두 사건 A와 B가 서로 **독립**이면 확률의 곱셈정리에 의하여

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(A) \times P(B)$$

가 성립한다. 역으로 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$이고 $P(A) \neq 0$이라면

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

> ☞ **두 사건이 독립일 경우 확률의 곱셈정리**
>
> 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.
>
> $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (단, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$)

- 위의 표에서는 모든 결합확률에 대한 사건들이 서로 독립이다. 이런 경우 두 변량 성별과 안경착용여부가 독립이라고 한다. 표를 살펴보면 전체 학생의 '안경착용'과 '안경착용 안함' 사건의 확률이 각각 0.5와 0.5이다. 두 변량이 독립인 경우 이러한 비율이 남학생과 여학생 각각에 대해서도 같이 유지된다.

예제 2.11 『eStatH』를 이용하여 조건부확률과 독립인 사건을 실습하여 보자.

풀이

- 『eStatH』 메뉴에서 '조건부확률'을 선택하면 <그림 2.6>과 같은 창이 나타난다. 여기에서 결합확률 $P(A_1 \cap B_1)$ 를 조정하면 그 밑에 조건부확률을 관찰할 수 있고 그 밑에 <그림 2.7>과 같은 선그래프와 각각의 행에 대한 조건부확률의 막대그래프를 관찰할 수 있다.

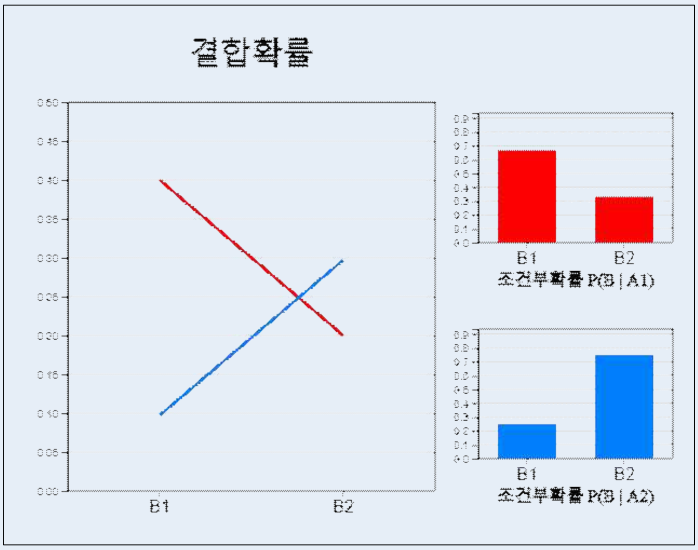
조건부확률 메뉴

결합확률	B_1	B_2	합계
A_1	$P(A_1 \cap B_1) =$ 0.40 (0 – 0.50)	$P(A_1 \cap B_2) = 0.20$	$P(A_1) =$ 0.60 (0 – 1)
A_2	$P(A_2 \cap B_1) = 0.10$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.30$	$P(A_2) = 0.40$
합계	$P(B_1) =$ 0.50 (0 – 1)	$P(B_2) = 0.50$	1.00

조건부확률	B_1	B_2	합계
A_1	$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = 0.67$	$P(B_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(A_1)} = 0.33$	1.00
A_2	$P(B_1 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = 0.25$	$P(B_2 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(A_2)} = 0.75$	1.00

실행

<그림 2.6> 조건부확률



<그림 2.7> 결합확률에 대한 그래프와 조건부확률

예제 2.11 풀이 계속

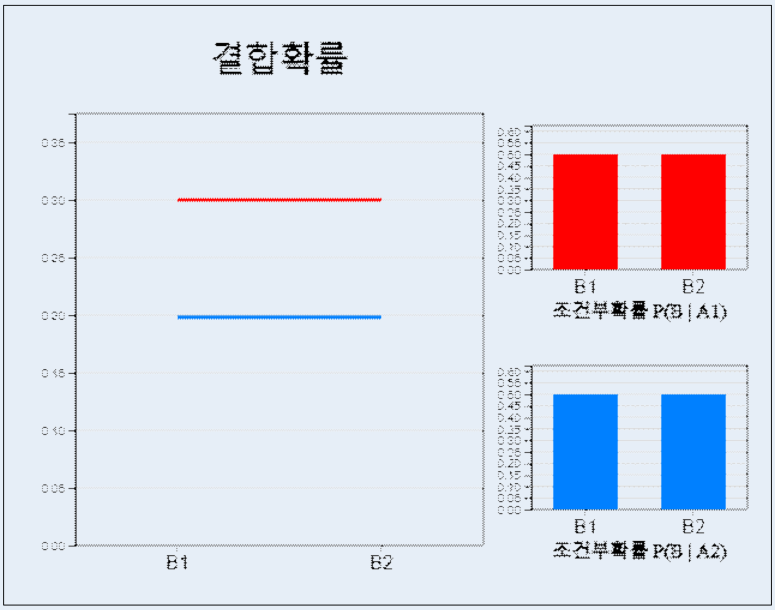
- 만일 결합확률 $P(A_1 \cap B_1)$ = 0.30, $P(A_1)$ = 0.60으로 <그림 2.8>과 같이 조정하면 <그림 2.9>와 같은 독립인 경우의 조건부확률과 꺾은선그래프를 관찰할 수 있다.

조건부확률 메뉴

결합확률	B_1	B_2	합계
A_1	$P(A_1 \cap B_1) =$ 0.30 (0 — 0.50)	$P(A_1 \cap B_2) = 0.30$	$P(A_1) =$ 0.60 (0 — 1)
A_2	$P(A_2 \cap B_1) = 0.20$	$P(A_2 \cap B_2) = 0.20$	$P(A_2) = 0.40$
합계	$P(B_1) =$ 0.50 (0 — 1)	$P(B_2) = 0.50$	1.00

조건부확률	B_1	B_2	합계
A_1	$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = 0.50$	$P(B_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(A_1)} = 0.50$	1.00
A_2	$P(B_1 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = 0.50$	$P(B_2 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(A_2)} = 0.50$	1.00

<그림 2.8> 두 변량이 독입인 경우의 확률 입력



<그림 2.9> 두 변량이 독립인 경우의 꺾은선그래프와 조건부확률

문제 2.11 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 홀수인 사건을 A, 3이하인 사건을 B라 할 때 두 사건이 독립인지 종속인지 살펴보라.

문제 2.12

한 대학교 신입생 30명의 남녀별, 출신지역별 분포가 다음과 같다.

	서울출신(S)	지방출신(C)	합계
남자(M)	10	10	20
여자(F)	5	5	10
합계	15	15	30

한 학생을 뽑았을 때 남자일 사건과 서울출신일 사건이 서로 독립인가?